

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Юрьева О.Д.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Дифференциальные уравнения»**

Для студентов для студентов всех направлений и специальностей ФМИАТ
очной и заочной форм обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» / составитель: О.Д. Юрьева. - Ульяновск: УлГУ, 2019. Настоящие методические указания предназначены для студентов для студентов всех направлений и специальностей ФМИАТ очной и заочной форм обучения. В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля и тесты для самостоятельной работы. Студентам очной и заочной форм обучения они будут полезны при подготовке к лекциям, семинарам, к зачету и экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № 2/19 от 19 марта 2019 г.).

Содержание

1. Литература для изучения дисциплины.....	4
2. Методические указания.....	5
2.1 Раздел 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.....	5
2.2 Тема 1. Дифференциальное уравнение первого порядка	
Основные определения. Интегральные кривые. Задача Коши. Частное и общее решения. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Полные решения. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.....	5
2.3. Раздел 2. Системы линейных уравнений и линейные n-го порядка	12
2.4. Тема 2. Нормальные системы дифференциальных уравнений.	
Системы дифференциальных уравнений. Нормальный вид. Задача Коши. Теоремы существования и единственности решения. Следствия для одного дифференциального уравнения n-го порядка.....	12
2.5. Тема 3. Линейные системы уравнений	
Основные свойства решений. Определитель Вронского. Пространство решений. Фундаментальные системы решений. Построение общего решения. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Структура фундаментальной матрицы.....	18
2.6.Тема 4. Дифференциальные уравнения n-го порядка.....	23
Однородное линейное уравнение. Определитель Вронского и его свойства. Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Уравнения в частных производных первого порядка.	

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

основная

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>
2. 2.1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-мат. спец. вузов. Т. 1 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит, 2006.
2.2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-матем. спец. вузов. Т. 2 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит : Лаборатория Знаний, 2003.
2.3 Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-мат. спец. вузов. Т. 3 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит, 2005.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.

дополнительная

1. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992
2. Веденяпин А.Д., Практикум. Дифференциальные уравнения. В 2 ч. Часть 1. Дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним [Электронный ресурс] / Веденяпин А.Д., Поливенко В.К. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 160 с. - ISBN 978-5-9221-1007-5 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110075.html>
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. М., Лань, 2007. 576 с.
4. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 435 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432105>
5. Пантелеев А.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс]: учеб. пособие с мультимедиа сопровождением / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков - М. : Логос, 2017. - 384 с. - ISBN 978-5-98704-465-0 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987044650.html>

учебно-методическая

1. Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев, О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>
2. Юрьева, О. Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы : учеб.-метод. пособие и типовые расчеты / О. Д. Юрьева, И. А. Перцева, Н. О. Седова ; УлГУ, ФМИиАТ. - Ульяновск : УлГУ, 2016.- URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/Yrzeva2016.pdf>

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1. РАЗДЕЛ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

2.2. ТЕМА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Основные вопросы:

1. Основные определения. Интегральные кривые. Задача Коши. Частное и общее решения.
2. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Полные решения.
4. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в книгах [1] стр. 10-15, [3] стр. 7-13, в учебно-методическом пособии [1] стр. 11-13.

Вопрос 2 изложен в книгах [1] на с. 11-23, [3] стр. 14-85, в учебно-методическом пособии [1] стр. 14-25 .

Вопрос 3 изложен в книгах [1] на с. 27-35, [3] стр. 225-259, в учебно-методическом пособии [1] стр. 24-32.

Вопрос 4 изложен в книге [1] на с. 44-52, в учебно-методическом пособии [1] стр. 39-42.

Контрольные вопросы по теме 1:

1. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка.
2. Запишите дифференциальное уравнение первого порядка в виде, разрешенном относительно производной.
3. Что называется решением дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что называется интегральной кривой?
5. Как построить поле направлений для дифференциального уравнения первого

порядка?

6. Что такое изоклины? Запишите общее уравнение изоклин.

7. Как построить приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка с помощью изоклин?

8. Запишите задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

9. Что называется решением задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка?

10. Запишите вид уравнения с разделяющимися переменными. Дайте алгоритм решения.

11. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?

12. Какое решение называется особым?

13. Какое уравнение называется однородным?

14. Метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

15. Что называется общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка.

16. Запишите вид линейного уравнения первого порядка.

17. Метод Бернулли отыскания общего решения линейного уравнения первого порядка.

18. Запишите вид уравнения Бернулли, замену для его решения.

19. Сформулируйте достаточные условия устойчивости дифференциального уравнения первого порядка.

20. Что называется последовательными приближениями Пикара? Дайте общую формулу для их нахождения.

21. Как связаны последовательные приближения Пикара с решением задачи Коши на отрезке?

22. Сформулируйте достаточные условия единственности дифференциального уравнения первого порядка.

24. Запишите вид уравнения в симметричной форме.

25. Какое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?

26. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, когда уравнение в симметричной форме является уравнением в полных дифференциалах.

27. Что такое интегрирующий множитель?

28. Перечислите основные методы решения дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

29. Запишите вид уравнения Лагранжа, Клеро.

30. Что называется огибающей семейства решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

**Тесты для самостоятельной работы:
Тест 1**

<p>Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений:</p> <p>1) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$; 2) $y' + y - xy^2 = 0$; 3) $x(y^2 - 4)dx + y dy = 0$; 4) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x$</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли</p>
<p>Задание 2. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения</p> $ydy = \frac{dx}{2(x+1)}$	<p>Варианты ответов:</p> <p><input type="radio"/> $y = e^x$; <input type="radio"/> $y = 2$; <input type="radio"/> $y = \frac{1}{x+1}$; <input type="radio"/> $y = \sqrt{\ln(x+1)}$.</p>
<p>Задание 3. Среди перечисленных задач задачей Коши является...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p><input type="radio"/> $xyy' = 1 - x^2$; <input type="radio"/> $ydx + ctgxdy = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$; <input type="radio"/> $y' = 3y - 1$; <input type="radio"/> $(y')^2 + y = 1, y(0) = 1, y(1) = 2$.</p>
<p>Задание 4. Функция $y = C(x+1)$ является решением уравнения $y' + 2 = 0$, если C принимает значение...</p>	<p>Укажите ответ $C = \dots$</p>
<p>Задание 5. Решите задачу Коши</p> $\begin{cases} xy' - 6y = x, \\ y(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$ <p>и в ответе укажите значение $y(0)$.</p>	<p>Укажите ответ</p>
<p>Задание 6. Решите дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 7. Решите дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$.</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 8. Является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах</p>	<p>1) да 2) нет</p>

$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$	
Задание 9. Является ли функция $U(x, y) = x^2 y^3 + 2xy$ общим интегралом дифференциального уравнения $(2xy^3 + 2y)dx + (3x^2 y^2 + 2x)dy = 0$	1) да 2) нет
Задание 10. Решите уравнение в полных дифференциалах $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y)dy = 0$	Запишите полное решение

Тест 2

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$; 2) $y' + \frac{y}{x} = x^2$; 3) $x(y^2 - 4)dx + y dy = 0$; 4) $y' + 2xy = 2y^3 y^3$.	Варианты ответов: уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли;
Задание 2. Укажите функции, являющиеся решениями уравнения $xy^2 = y'$.	Варианты ответов: <input type="radio"/> $y = 4 - \frac{2}{y'}$; <input type="radio"/> $y = \frac{x^2}{2}$; <input type="radio"/> $y = -\frac{2}{x^2}$; <input type="radio"/> $y = \frac{2}{x^2}$
Задание 3. Среди перечисленных задач задачей Коши является...	Варианты ответов: <input type="radio"/> $y'x + y + xy^2 = 0$ <input type="radio"/> $y' = e^{-2x}, y(0) = 1, y(2) = e^{-4}$; <input type="radio"/> $y = (y')^2, y(0) = 2$; <input type="radio"/> $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$.
Задание 4. Укажите, при каком значении	Укажите ответ

С функцией $y = x^3$ является решением уравнения $y' = Cx^2$.	
Задание 5. Решите задачу Коши $\begin{cases} y' = 2e^{-2y}, \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y\left(\frac{e}{4}\right)$.	Укажите ответ
Задание 6. Решите дифференциальное уравнение $\frac{xy' - y}{x} = tg \frac{y}{x}$.	Запишите полное решение
Задание 7. Решите дифференциальное уравнение $\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = 1$.	Запишите полное решение
Задание 8. Является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - x^3) ydy = 0$	1) да 2) нет
Задание 9. Является ли функция $U(x, y) = xy^5 - 3xy^2$ общим интегралом дифференциального уравнения $(y^5 - 3y^2)dx + (5xy^4 - 6xy)dy = 0$	1) да 2) нет
Задание 10. Решите уравнение в полных дифференциалах $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$	Запишите полное решение

Тест 3

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $xy' - y^2 \ln x + y = 0$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$; 3) $xy' - y = x^2 \cos x$; 4) $y' = tg x tg y$.	Варианты ответов: уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли
Задание 2. Укажите функцию,	Варианты ответов:

<p>являющуюся решением уравнения</p> $y' = -tg x.$	<ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y = -\frac{1}{\cos^2 x};$ <input type="radio"/> $y = \ln(\cos x);$ <input type="radio"/> $y = \frac{\sin x}{\cos x};$ <input type="radio"/> $y = \ln(\sin x).$
<p>Задание 3. Среди перечисленных задач задачей Коши является...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y' = \frac{e^y}{2};$ <input type="radio"/> $(y + 1)dx + (x^2 - 2)dy = 0;$ <input type="radio"/> $y' + (x + 5)y = xy^2,$ $y(0) = 2;$ <input type="radio"/> $2yy' = 4 + (y')^2, y(0) = 1,$ $y'(0) = 2.$
<p>Задание 4. Укажите, при каком значении C функция $y = e^{2x+3}$ является решением уравнения</p> $y' - 2y + C = 2.$	<p>Укажите ответ</p>
<p>Задание 5. Решите задачу Коши</p> $\begin{cases} xy' - y = -2xy^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$ <p>и в ответе укажите значение $y(2)$.</p>	<p>Укажите ответ</p>
<p>Задание 6. Решите дифференциальное уравнение</p> $y^2 y' = y(x - y).$	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 7. Решите дифференциальное уравнение</p> $y' = xy + x^3 y^2.$	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 8. Является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах</p> $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$	<p>1) да 2) нет</p>
<p>Задание 9. Является ли функция</p> $U(x, y) = 3xy^3 - 2xy^2$ <p>общим интегралом дифференциального</p>	<p>1) да 2) нет</p>

уравнения $(3y^3 - 2y^2)dx - (9xy^2 - 4xy)dy = 0$	
Задание 10. Решите уравнение в полных дифференциалах $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$	Запишите полное решение

Тест 4

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' + 2xy = x^2e^{-x^2}$; 2) $y' + xy + (2 - x)e^xy^2 = 0$; 3) $(1 + x^2)dy + ydx = 0$; 4) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$.	Варианты ответов: уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли
Задание 2. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения $dy - 3x^2y dx = 0$.	Варианты ответов: <input type="radio"/> $y = e^{x^3}$; <input type="radio"/> $y = e^x + 2$; <input type="radio"/> $y = e^{x^3-1}$; <input type="radio"/> $y = 2e^{x^2}$.
Задание 3. Среди перечисленных задач “задачей Коши” является...	Варианты ответов: <input type="radio"/> $y' \sin^2 x = 2y$; <input type="radio"/> $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, y(0) = 2$; <input type="radio"/> $\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0, y(1) = 1, y(3) = 3$; <input type="radio"/> $ydx - xdy + \ln x dx = 0$.
Задание 4. Решите задачу Коши $\begin{cases} y'(x + 5)^2 = 4y^2, \\ y(-4) = \frac{1}{4}, \end{cases}$	Укажите ответ

и в ответе укажите значение $y(-3)$.	
Задание 5. Решите дифференциальное уравнение $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.	Запишите полное решение
Задание 6. Решите дифференциальное уравнение $xy' - y = x \cos x$.	Запишите полное решение
Задание 7. Решите дифференциальное уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$	Запишите полное решение
Задание 8. Является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах $(2xy^2 - 1)dx + (2y^2 + x^2)dy = 0$	1) да 2) нет
Задание 9. Является ли функция $U(x, y) = xy - 5x^4y$ общим интегралом дифференциального уравнения $(y - 20x^3y)dx + (x - 5x^4)dy = 0$	1) да 2) нет
Задание 10. Решите уравнение в полных дифференциалах $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$	Запишите полное решение

2.3. РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА

2.4. ТЕМА 2. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные вопросы:

1. Системы дифференциальных уравнений. Нормальный вид. Задача Коши.
2. Теоремы существования и единственности решения.

3. Следствия для одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы 1,2 изложены в книге [1] на с. 52-58, в учебно-методическом пособии [1] стр 48-53.

Вопрос 3 изложен в книге [1] на с.81-85.

Вопросы 1-3 представлены в книге [3] стр. 180-216.

Контрольные вопросы по теме 2:

1. Запишите общий вид системы дифференциальных уравнений n -го порядка.
2. Что называется решением системы дифференциальных уравнений n -го порядка?
3. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
4. Как привести систему дифференциальных уравнений n – го порядка к нормальному виду?
5. Что называется решением задачи Коши нормальной системы дифференциальных уравнений?
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Тесты для самостоятельной работы:

Тест 1

Задание 1. Среди перечисленных систем укажите линейные однородные системы: 1. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - 4y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + y, \\ \dot{y} = 2x - y + t; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y - 5, \\ \dot{y} = 3x + 7y; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 3x^2 + 4y \end{cases}$	Перечислите номера систем
Задание 2. Корнями характеристического уравнения системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x; \end{cases}$ являются...	Укажите ответы: 1. $\lambda_1 =$ 2. $\lambda_2 =$
Задание 3. По заданным корням характеристического уравнения найдите общее решение системы	Запишите полное решение

$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$	
<p>Задание 4. Являются ли предложенные функции решением системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases} x = e^t \cos 3t, y = e^t \sin 3t$	<p>1) Да 2) Нет</p>
<p>Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений</p> $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 5x + 6y \end{cases}$	<p>Запишите полное решение</p>

Тест 2

<p>Задание 1. Среди перечисленных систем укажите линейные однородные системы:</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = 5x^3 - 3y, \\ \dot{y} = 3x - 4y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2x - y + 2t; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 7y; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 3y, \\ \dot{y} = 2x^2 - 4y \end{cases}$</p>	<p>Перечислите номера систем</p>
<p>Задание 2. Корнями характеристического уравнения системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} \text{ являются...}$	<p>Укажите ответы:</p> <p>1. $\lambda_1 =$</p> <p>2. $\lambda_2 =$</p>
<p>Задание 3. По заданным корням характеристического уравнения найдите общее решение системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases} \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 4. Являются ли предложенные функции решением системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases} x = \cos 2t, y = \sin 2t$	<p>1) Да 2) Нет</p>
<p>Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений</p> $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 3y, \\ \dot{y} = x + 5y \end{cases}$	<p>Запишите полное решение</p>

Тест 3

<p>Задание 1. Среди перечисленных систем укажите линейные однородные системы:</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 3x + 2y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3x - y + \sin t; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y - 2t, \\ \dot{y} = x + 3y; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 5x^2 - 4y \end{cases}$</p>	<p>Перечислите номера систем</p>
<p>Задание 2. Корнями характеристического уравнения системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \text{ являются...}$	<p>Укажите ответы:</p> <p>1. $\lambda_1 =$</p> <p>2. $\lambda_2 =$</p>
<p>Задание 3. По заданным корням характеристического уравнения найдите общее решение системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases} \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 4. Являются ли предложенные функции решением системы</p> $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases} x = e^{3t}, y = e^{3t}$	<p>1) Да</p> <p>2) Нет</p>
<p>Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений</p> $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$	<p>Запишите полное решение</p>

Тест 4

<p>Задание 1. Среди перечисленных систем укажите линейные однородные системы</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x^3 - 2y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x - y + \cos t; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 7y; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 3x^2 + 4y + 2x \end{cases}$</p>	<p>Перечислите номера систем</p>
<p>Задание 2. Корнями характеристического уравнения системы</p> <p>$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$ являются...</p>	<p>Укажите ответы:</p> <p>1. $\lambda_1 =$</p> <p>2. $\lambda_2 =$</p>
<p>Задание 3. По заданным корням характеристического уравнения найдите общее решение системы</p> <p>$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$ $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 4. Являются ли предложенные функции решением системы</p> <p>$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$ $x = te^t, y = 2te^t$</p>	<p>1) Да</p> <p>2) Нет</p>
<p>Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений</p> <p>$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$</p>	<p>Запишите полное решение</p>

2.5. ТЕМА 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Основные вопросы:

1. Основные свойства решений. Определитель Вронского. Пространство решений.
2. Фундаментальные системы решений. Построение общего решения.
3. Линейные системы с постоянными коэффициентами.
4. Структура фундаментальной матрицы.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в книгах [1] на с. 98-106, [3] стр. 472-489.

Вопрос 2 изложен в книге [1] на с. 107-109, в учебно-методическом пособии [1] стр. 48-63.

Для самостоятельного изучения вопросов 3-4 следует обратиться к книгам [1] на с. 109-113, [3] стр. 494-504, учебно-методическому пособию [1] стр. 80-84.

Контрольные вопросы по теме 3

1. Запишите общий вид линейной системы дифференциальных уравнений.
2. Какая линейная система называется однородной, неоднородной?
3. Перечислите свойства однородных систем.
4. Что такое определитель Вронского?
5. Как установить линейную зависимость или независимость произвольной системы вектор-функций, совокупности n решений однородной системы дифференциальных уравнений?
6. Что называется фундаментальной системой решений однородной системы дифференциальных уравнений?
7. Какова структура общего решения однородной системы дифференциальных уравнений?
8. Запишите формулу Лиувилля-Остроградского.
9. Какова структура общего решения неоднородной системы?
10. Какие методы используются для отыскания частного решения неоднородной системы?

Тесты для самостоятельной работы:

Тест 1

<p>Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = 0$</p> <p><input type="radio"/> $y\frac{\partial z}{\partial x} + x = 0$</p> <p><input type="radio"/> $x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x = y$</p> <p><input type="radio"/> $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$</p>
<p>Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$</p> <p><input type="radio"/> $(y')^2 = y'$</p> <p><input type="radio"/> $y' = \frac{y+1}{x}$</p> <p><input type="radio"/> $xy' + 5y' + x = 0$</p>
<p>Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$</p>
<p>Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения:</p> <p>1) $y' = xy$</p> <p>2) $(x + 1) dy = y^2 dx$</p> <p>3) $y' = 2xy + y^2$</p> <p>4) $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p><input type="radio"/> разложение переменных, затем интегрирование</p> <p><input type="radio"/> подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y = u(x)v(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y' = z(x)$</p>
<p>Задание 5. Дано $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y' + 4y' = 0$. Укажите</p>	<p>Укажите ответ</p>

значение C_1 , если $C_2 = -1$	
Задание 6. Функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$ является общим решением дифференциального уравнения...	Варианты ответов: <input type="radio"/> $y' + y = e^x$ <input type="radio"/> $y' + y' = e^x$ <input type="radio"/> $y'' + y' = 0$ <input type="radio"/> $y'' + 2y' + y = e^x$
Задание 7. Частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = \sin 2x$ имеет вид...	<input type="radio"/> $y_c = A \cos 2x + B \sin 2x$ <input type="radio"/> $y_c = A \cos x + B \sin x$ <input type="radio"/> $y_c = Ax + B$ <input type="radio"/> $y_c = Ax^2$
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$	Запишите полное решение
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $2y'' + y' - y = 2e^x$	Запишите полное решение
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $2xyy' = x^2 - y^2$	Запишите полное решение

Тест 2

<p>Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $(x^2 + y)dx - xdy = 0$</p> <p><input type="radio"/> $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$</p> <p><input type="radio"/> $y' = \frac{2x-y-5}{2x-y+4}$</p> <p><input type="radio"/> $yy' = x^2$</p>
<p>Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $yy'y'' = (y')^3$</p> <p><input type="radio"/> $xy' = y^2$</p> <p><input type="radio"/> $y' = e^{2x} - e^{xy}$</p> <p><input type="radio"/> $y'' + 6y' + 25y = 5$</p>
<p>Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = x + 3y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t^2, \\ \dot{y} = x + e^t; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y + t, \\ \dot{y} = 5x + 2y + 1; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$</p>
<p>Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения:</p> <p>1) $(1-x^2)y' - y = 1 + x$</p> <p>2) $y \cos \frac{y}{x} dx = xdy$</p> <p>3) $y''y = y'$</p> <p>4) $(x^2 - 1)dy + (y^2 - 4)dx = 0$</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p><input type="radio"/> разложение переменных, затем интегрирование</p> <p><input type="radio"/> подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y = u(x) v(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y' = p(x)$</p>
<p>Задание 5. Дано общее решение $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ дифференциального уравнения $y'' + 9y' = 0$. Укажите значение C_2, если $C_1 = 2$</p>	<p>Укажите ответ</p>

<p>Задание 6. Функция $y = (C_1 + x) \sin x$ является общим решением дифференциального уравнения...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y'' + 5y' + 4y = \sin x$ <input type="radio"/> $y'' + 5y' + 4y = 0$ <input type="radio"/> $y' = \sin x$ <input type="radio"/> $y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x$
<p>Задание 7. Частное решение линейного уравнения дифференциального уравнения $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$ имеет вид...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y_c = Ae^{4x}$ <input type="radio"/> $y_c = (Ax + B)e^{4x}$ <input type="radio"/> $y_c = Axe^{4x}$ <input type="radio"/> $y_c = Ax^2e^{2x}$
<p>Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $xy' - \frac{y}{x+1} = x$</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 6$</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y''' = x + \sin x$</p>	<p>Запишите полное решение</p>

2.6. ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА

Основные вопросы:

1. Однородное линейное уравнение.
2. Определитель Вронского и его свойства.
3. Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации произвольных постоянных.
4. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения.
5. Уравнения в частных производных первого порядка.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы 1,2 изложены в книгах [1] на с. 85-87, [3] стр. 367-389.

Для самостоятельного изучения вопроса 3 следует обратиться к книгам [1] на с. 88-91, [3] стр. 389-397, учебно-методическому пособию [1] стр. 56-59.

Вопрос 4 изложен в книгах [1] на с. 92-97, [3] стр. 417-422, в учебно-методическом пособии [1] стр. 65-80.

Вопрос 5 изложен в книгах [1] на с. 116-136, [3] стр. 539-554.

Контрольные вопросы по теме 4:

1. Запишите вид линейного неоднородного уравнения n -го порядка.
2. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения n -го порядка.
3. Выпишите определитель Вронского для совокупности решений линейного однородного уравнения n -го порядка.
4. Какие решения линейного однородного уравнения n -го порядка называются линейно зависимыми?
5. Как установить линейную зависимость совокупности n решений линейного однородного уравнения с помощью определителя Вронского?
6. Запишите формулу Лиувилля-Остроградского для совокупности n решений линейного однородного уравнения n -го порядка.
7. Какова структура общего решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка?
8. Дайте формулировку теоремы Штурма.
9. Запишите вид линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.
10. Какое уравнение называется характеристическим для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами?
11. Запишите вид общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случаях: простых действительных, кратных и комплексных корней характеристического уравнения.
12. Какие способы отыскания частного решения линейного неоднородного

уравнения n -го порядка существуют?

13. Как определить вид частного решения линейного неоднородного уравнения по виду неоднородности?

14. Какие приближенные методы решения линейных уравнений с переменными коэффициентами вы знаете?

Тесты для самостоятельной работы:

Тест 1

<p>Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy$ <input type="radio"/> $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ <input type="radio"/> $\frac{d^2 y}{dx^2} = x \sin x$ <input type="radio"/> $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{y} = 0$
<p>Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y' + y = e^{3x}(x + 1)$ <input type="radio"/> $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ <input type="radio"/> $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ <input type="radio"/> $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$
<p>Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + (t+1)e^{3t}, \\ \dot{y} = x + 4y = 2te^{3t}; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x + 6y; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^t; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$</p>
<p>Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения:</p> <p>1) $y'x^2 - x^2 - y^2 = 0$</p> <p>2) $y'' = x^2 + e^{4x} + 2$</p> <p>3) $\sin^2 xy' = 1$</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> разложение переменных, затем интегрирование <input type="radio"/> подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$ <input type="radio"/> подстановка $y = u(x)v(x)$ <input type="radio"/> последовательное

4) $y' = 3x^2y + x^5$	интегрирование
Задание 5. Дано $y = C_1 + C_2e^{-8x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' + 8y' = 0$. Укажите значение C_1 , если $C_2 = -2$	Укажите ответ
Задание 6. Функция $y = C_1 \cos \frac{x}{4} + C_2 \sin \frac{x}{4}$ является общим решением дифференциального уравнения...	Варианты ответов: <input type="radio"/> $16y'' + y = e^x$ <input type="radio"/> $y'' + \frac{y}{16} = 0$ <input type="radio"/> $16y' + y = e^x$ <input type="radio"/> $y'' + 16y = 0$
Задание 7. Частное решение линейного уравнения дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 24 \cos x$ имеет вид...	<input type="radio"/> $y_c = x A \cos x$ <input type="radio"/> $y_c = x A \sin x$ <input type="radio"/> $y_c = A \cos x + B \sin x$ <input type="radio"/> $y_c = A \cos 6x + B \sin x$
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' + 2y = 4xe^{-x^2}$	Запишите полное решение
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = e^x$	Запишите полное решение
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$	Запишите полное решение

Тест 2

<p>Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$</p> <p><input type="radio"/> $y\frac{\partial z}{\partial x} + 1 = 0$</p> <p><input type="radio"/> $xy' + 1 = e^y$</p> <p><input type="radio"/> $y'' = \sin^2 \frac{x}{y}$</p>
<p>Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p><input type="radio"/> $1 + (y')^2 = 2yy''$</p> <p><input type="radio"/> $y = xy' + (y')^2$</p> <p><input type="radio"/> $y'' + y' - 2y = 0$</p> <p><input type="radio"/> $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$</p>
<p>Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p>1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases}$</p> <p>3. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + y + 2, \\ \dot{y} = 7x + y + e^t \end{cases}$</p>
<p>Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения:</p> <p>1) $(x + 1)y' - 2y = e^x$</p> <p>2) $yy' \sin x = \cos x$</p> <p>3) $y'' = e^{2y}$</p> <p>4) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p><input type="radio"/> разложение переменных, затем интегрирование</p> <p><input type="radio"/> подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y = u(x) v(x)$</p> <p><input type="radio"/> подстановка $y' = z(x)$ или $y' = p(y)$</p>

<p>Задание 6. Функция $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ является общим решением дифференциального уравнения...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y'' = e^{2x}$ <input type="radio"/> $y'' - 4y = 0$ <input type="radio"/> $y''' - 4y' = 0$ <input type="radio"/> $y' - 4y = e^{2x}$
<p>Задание 7. Частичное решение линейного уравнения дифференциального уравнения $y'' + y' + 2y = x^2$ имеет вид...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> $y_ч = Ax^2$ <input type="radio"/> $y_ч = Ae^x$ <input type="radio"/> $y_ч = x(Ax + B)$ <input type="radio"/> $y_ч = Ax^2 + Bx + C$
<p>Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 10$</p>	<p>Запишите полное решение</p>
<p>Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y''' = \cos 2x + \frac{1}{x^4}$</p>	<p>Запишите полное решение</p>